

Poboljšana linearizacija optimalne kompresorske funkcije sa hijerarhijskim kodovanjem

Zoran H. Perić, *Member, IEEE*, Lazar Z. Velimirović, and Milan R. Dinčić, *Senior Member, IEEE*

Sadržaj — U ovom radu vrši se linearizacija optimalne kompresorske funkcije i primenjuje se hijerarhijsko kodovanje (prvo se koduju segmenti a nakon toga ćelije unutar segmenata), čime se ostvaruje jednostavan i brz proces kodovanja i dekodovanja. Predložena su četiri metoda optimizacije zadnjeg segmenta, čime se poboljšavaju performanse i dobija se $SQNR$ (odnos signal-šum kvantizacije) blizak onom kod nelinearne optimalne kompresorske funkcije.

Cljučne reči — Linearizacija, Optimalna kompresorska funkcija, Skalarni komparator.

I. UVOD

POSTUPKOM skalarnog kvantovanja trenutna vrednost kontinualnog ulaznog signala zaokružuje se na najbližu dozvoljenu vrednost iz konačnog skupa od N diskretnih amplitudskih nivoa. Skalarni kvantizer je jednoznačno određen skupom dozvoljenih izlaznih amplitudskih nivoa koji se nazivaju reprezentacionim nivoima i podelom ulaznog opsega vrednosti na N ćelija ili kvantizacionih intervala. Kvantizeri mogu biti uniformni (svi kvantizacioni intervali su iste širine) i neuniformni (kvantizacioni intervali su različite širine) [1]. Uniformni kvantizeri su pogodni za signale koji imaju približno uniformnu raspodelu. Kako većina signala nema uniformnu raspodelu (najčešće su male trenutne vrednosti mnogo verovatnije od velikih), javlja se potreba za korišćenjem neuniformnih kvantizera. Jedan od najčešće korišćenih načina za realizaciju neuniformnih kvantizera je kompadding tehnika, u kojoj se nad ulaznim signalom primenjuje određena kompresorska funkcija. Najčešće korišćene kompresorske funkcije su optimalna (koja daje maksimalni odnos signal-šum kvantizacije ($SQNR$) za referentnu varijansu ulaznog signala) i logaritamski A i μ zakoni kompresije (kojima se ne može postići maksimalni $SQNR$ ali koji daju konstantan $SQNR$

u širokom opsegu varijanse ulaznog signala). Ove kompresorske funkcije je veoma komplikovano praktično realizovati. Zbog toga se, u cilju jednostavnije praktične realizacije, vrši linearizacija kompresorske funkcije. Tako je linearizacija logaritamskih A i μ zakona kompresija izvršena definisanjem dobro poznatih segmentnih A i μ zakona kompresije [1], u kojima se ulazni opseg kvantizera deli na segmente i unutar svakog segmenta koristi se linearna kompresorska funkcija, tj. vrši se uniformna podela segmenta na ćelije. Na taj način dobija se deo-po-deo uniformni kvantizer. Broj ćelija u svakom segmentu je isti i moguće je primeniti hijerarhijsko kodovanje, a to znači da se prvo koduje segment pa onda ćelije unutar segmenta. Linearizacija optimalne kompresorske funkcije rađena je u radovima [2, 3]. U radu [3] razmatrana je Gausova raspodela i granice segmenata određene su primenom inverzne kompresorske funkcije. U radu [2] izvršena je linearizacija sa nejednakim brojem ćelija po segmentima, tj. za svaki segment vrši se optimizacija broja ćelija. Nedostatak ovog metoda je velika kompleksnost kodovanja i dekodovanja i nemogućnost primene hijerarhijskog kodovanja.

U ovom radu vrši se linearizacija optimalne kompresorske funkcije za ulazni signal Laplasove raspodele, na sličan način kao za segmentni A i μ zakon – svi segmenti imaju isti broj ćelija i vrši se hijerarhijsko kodovanje. Ovaj način linearizacije optimalne kompresorske funkcije je mnogo jednostavniji od onog u radu [2] a dobijeni su slični rezultati. Poseban doprinos ovog rada predstavlja optimizacija zadnjeg segmenta, čime je ostvareno poboljšanje u odnosu na dosadašnje tehnike linearizacije. Predstavljena su četiri načina optimizacije zadnjeg segmenta i dobijene su vrednosti $SQNR$ -a koje su bliske $SQNR$ -u za nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju.

II. NELINEARNA OPTIMALNA KOMPRESORSKA FUNKCIJA

U ovom poglavlju ukratko ćemo opisati nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju.

Skalarni kvantizer je jednoznačno određen reprezentacionim nivoima $\{y_1, \dots, y_N\}$ i granicama odluke $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ kojima se ulazni opseg kvantizera deli na N

Zoran H. Perić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (telefon: 381-18-529101; e-mail: zoran.peric@elfak.ni.ac.rs).

Lazar Z. Velimirović, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: velimirovic.lazar@gmail.com).

Milan R. Dinčić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: mdincha@hotmail.com).

ćelija ili intervala kvantovanja $\alpha_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j=1,2,\dots,N$. Prilikom kvantizacije pravi se greška koja se izražava distorzijom. Ukupna distorzija predstavlja zbir granularne distorzije D_g i distorzije prekoračenja D_p :

$$D = D_g + D_p, \quad (1)$$

koje se definišu na sledeći način [1]:

$$D_g = \sum_{j=2}^{N-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (x - y_j)^2 p(x) dx, \quad (2)$$

$$D_p = 2 \int_{t_{N-1}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx, \quad (3)$$

gde je $p(x)$ funkcija gustine verovatnoće trenutnih vrednosti signala x na ulazu skalarnog kvantizera. U ovom radu razmatraćemo ulazni signal sa Laplasovom raspodelom, za koju važi da je

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{|x|\sqrt{2}}{\sigma}}, \quad (4)$$

gde σ predstavlja standardnu devijaciju ulaznog signala. Kako je $p(x)$ parna funkcija, kvantizer će biti simetričan, tj. granice odluke i reprezentacioni nivoi u negativnom delu realne ose biće simetrični onima u pozitivnom delu. Zbog toga ćemo u daljem tekstu razmatrati samo pozitivan deo realne ose.

Jedan od načina realizacije neuniformne kvantizacije jeste tehnika komandovanja kojom se neuniformno kvantovanje postiže kompresijom ulaznog signala x korišćenjem kompresora sa nelinearnom karakteristikom $c(\cdot)$, zatim kvantovanjem komprimovanog signala primenom uniformnog kvantizera i na kraju ekspanovanjem kvantovane vrednosti komprimovanog signala, korišćenjem nelinearne inverzne karakteristike kompresije $c^{-1}(\cdot)$. Granularna distorzija za komandovanje kvantizer data je Benetovim integralom u obliku [1]:

$$D_g = \frac{1}{12N^2} \int_R \frac{p(x)}{[\lambda(x)]^2} dx, \quad (5)$$

gde $\lambda(x)$ predstavlja gustinu reprezentacionih nivoa i definiše se kao

$$\lambda(x) = \frac{1}{N\Delta_i}, \quad x \in (t_{i-1}, t_i] \quad (6)$$

dok je sa $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ označena veličina amplitudskih kvanata. Benetov integral (5) dobija oblik:

$$D_g = \frac{1}{12} \int_R \Delta_i^2 p(x) dx. \quad (7)$$

Minimum Benetovog integrala (5) ujedno je i minimum distorzije neuniformnog skalarnog kvantizera, što znači da se tehnikom komandovanja može realizovati optimalna skalarna kvantizacija. Određivanjem nagiba kompresorske funkcije (na pozitivnom delu karakteristike):

$$c'(x) = \frac{\Delta}{\Delta_i} = \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i} \approx c'(y_i), \quad i=1,\dots,N/2, \quad (8)$$

dobijamo izraz za gustinu reprezentacionih nivoa $\lambda(x) = c'(x)/(2x_{\max})$, i smenom u (5), dolazimo do poznatog oblika Benetovog integrala [1]:

$$D_g = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \int_R \frac{p(x)}{[c'(x)]^2} dx. \quad (9)$$

Kvalitet kvantovanog signala procenjuje se pomoću odnosa signal / šum kvantizacije ($SQNR$) koji se definiše sledećim izrazom:

$$SQNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma^2}{D} \right). \quad [\text{dB}] \quad (10)$$

Optimalna kompresorska funkcija $c(x)$ kojom se ostvaruje maksimalan $SQNR$ za referentnu varijansu ulaznog signala definisana je kao [1, 4]:

$$c(x) = x_{\max} \frac{\int_0^x p^{1/3}(x) dx}{\int_0^{x_{\max}} p^{1/3}(x) dx}. \quad (11)$$

Bez umanjena opštosti, projektovanje kvantizera biće urađeno za referentnu snagu $\sigma_{ref}^2 = 1$. Na osnovu jednačina:

$$c(t_i) = i \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i}, \quad c(y_i) = \left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i}, \quad (12)$$

dolazimo do sledećih izraza za granice odluke t_i , i za reprezentacione nivoe y_i , $i = N/2 + 1, \dots, N$:

$$t_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i + (2i - N) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3}\right)} \right), \quad (13)$$

$$y_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i + 1 + (2i - N - 1) \exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3}\right)} \right). \quad (14)$$

Razmatraćemo dva slučaja. Prvi slučaj je kada je maksimalna amplituda kvantizera x_{\max} konačna, i u radu [5] je pokazano da je tada njena optimalna vrednost

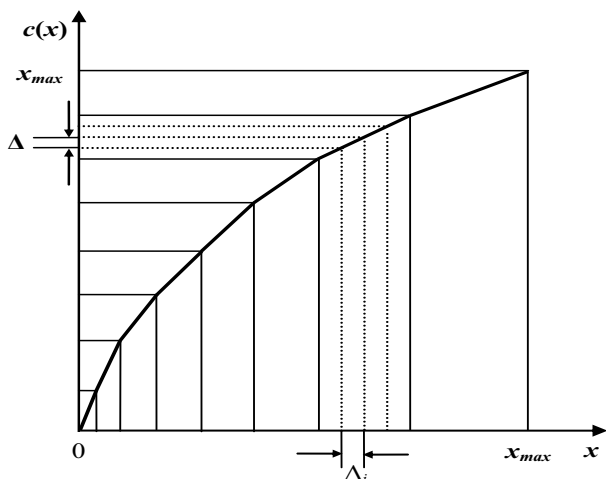
$$x_{\max} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N+1). \quad (15)$$

Drugi slučaj je kada $x_{\max} \rightarrow \infty$ i u tom slučaju izrazi (13) i (14) dobijaju oblik

$$t_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i} \right) \quad \text{i} \quad y_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i + 1} \right). \quad (16)$$

III. LINEARIZOVANA OPTIMALNA KOMPRESORSKA FUNKCIJA

U ovom poglavlju izvršićemo linearizaciju neuniformne optimalne karakteristike kompresije. Linearizacija se vrši tako što se ulazni amplitudski opseg kvantizera podeli na L segmenata, nakon čega se svaki segment uniformno deli na N/L ćelija jednake širine. Na taj način dobijamo deo po deo uniformni kvantizer. Zbog simetrije kvantizera, i ovde ćemo razmatrati samo pozitivan deo karakteristike (Sl. 1.).



Sl.1. Ilustracija deo po deo linearne kompresorske funkcije

Granice među segmentima u pozitivnom delu karakteristike, $t_i^*, i = L/2 + 1, \dots, L$ određuju se pomoću izraza

$$t_i^* = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{L}{2L - 2i + (2i - L) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} x_{\max}^*}{3}\right)} \right), \quad (17)$$

gde x_{\max}^* označava maksimalnu amplitudu linearizovanog deo-po-deo uniformnog kvantizera. Veličina ćelija u i -tom segmentu jednaka je

$$\Delta_i^* = \frac{t_i^* - t_{i-1}^*}{N/L}. \quad (18)$$

Sa $t_{i,j}, i = 1, \dots, L; j = 0, \dots, N/L$ označićemo granične tačke između ćelija u i -tom segmentu, pri čemu je $t_{i,0} = t_{i-1}^*$ i $t_{i,N/L} = t_i^*$. Sa $y_{i,j}, i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, N/L$ označićemo reprezentacioni nivo j -te ćelije u i -tom segmentu. Zbog uniformne podele segmenata na ćelije važi

$$t_{i,j} = t_{i-1}^* + j\Delta_i; \quad y_{i,j} = t_{i-1}^* + (j-1/2)\Delta_i. \quad (19)$$

Granularna distorzija za linearizovani model, na osnovu formule (7) data je sledećim izrazom:

$$D_g = 2 \sum_{i=1}^{L/2} \frac{\Delta_i^2}{12} P_i, \quad (20)$$

pri čemu je P_i verovatnoća da trenutna vrednost amplitude ulaznog signala pripada i -tom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$:

$$P_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(x) dx = \frac{1}{2} (\exp(-t_{i-1}^*) - \exp(-t_i^*)). \quad (21)$$

IV. OPTIMIZACIJA ZADNJEG SEGMENTA

U ovom poglavlju izvršićemo optimizaciju zadnjeg, L -tog segmenta ($t_{L-1}^*, t_L^* = x_{\max}^*$) i dati izraze za maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* i za granicu granularnog regiona $t'_{N-1} = t_{L,N/L-1}$. Optimizacijom

ovih parametara smanjuje se distorzija i povećava kvalitet izlaznog signala. Daćemo 4 metoda za optimizaciju zadnjeg segmenta. Metod 1 odnosi se na slučaj kada $x_{\max} \rightarrow \infty$ a metodi 2, 3 i 4 na slučaj kada je x_{\max} dato sa (15).

Metod 1. Ovaj metod odnosi se na slučaj kada maksimalna amplituda nelinearizovanog kvantizera teži beskonačnosti, tj. $x_{\max} \rightarrow \infty$. Postavlja se pitanje kako odrediti maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* , jer x_{\max}^* mora da ima konačnu vrednost. To radimo na sledeći način. Na osnovu formula (16) odredimo $t_{N-1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N/2)$ i $y_N = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N)$ za

nelinearizovanu karakteristiku, a zatim stavimo da je $t'_{N-1} \equiv t_{L,N/L-1} = t_{N-1}$ i $y_{L,N/L} = y_N$. Zatim odredimo

Δ_L^* kao $\Delta_L^* = 2(y_{L,N/L} - t'_{N-1})$ nakon čega nalazimo x_{\max}^* kao $x_{\max}^* \equiv t_L^* = t'_{N-1} + \Delta_L^*$.

Metod 2. Prema ovom metodu, maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* biramo tako da bude jednaka maksimalnoj amplitudi nelinearizovanog kvantizera x_{\max} datoj sa (15).

U ovom slučaju veličina amplitudskog kvanta Δ_L jednaka je:

$$\Delta_L = \frac{x_{\max}^* - t_{L-1}^*}{N/L}, \quad (22)$$

Granica granularnog regiona iznosi:

$$t'_{N-1} = x_{\max}^* - \Delta_L. \quad (23)$$

Metod 3. U ovom metodu granice segmenata $t_{L/2+1}^*, \dots, t_{L-1}^*$ određujemo po formuli (17), koristeći x_{\max}^* dato sa (15). Zadnji segment optimizujemo na sledeći način. Granicu granularnog regiona t'_{N-1} određujemo numerički minimizujući distorziju u poslednjem segmentu:

$$D_L = \frac{\Delta_L^2}{12} \int_{t_{L-1}}^{t'_{N-1}} p(x) dx + D_p, \quad (24)$$

dok distorzija prekoračenja iznosi

$$D_p = 2 \int_{t_{N-1}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx, \quad (25)$$

gde je $y_N = t'_{N-1} + \frac{\Delta_L}{2}$. Veličina amplitudskog kvanta

Δ_L se određuje prema jednačini (22).

Metod 4. Prema metodu 4 granicu granularnog regiona t'_{N-1} određujemo numerički postujući pri tom kriterijum minimuma ukupne distorzije, D_L , za poslednji segment, s tim što je poslednji reprezentacioni nivo y_j centroid [1, 4]:

$$y_j = \frac{\int_{t_{j-1}}^{t_j} xp(x)dx}{\int_{t_{j-1}}^{t_j} p(x)dx}, \quad (26)$$

Vrednost ukupne distorzije, D_L , za poslednji segment, u ovom slučaju iznosi:

$$D_L = \frac{\Delta_L^2}{12} \int_{t_{L-1}'}^{t_{N-1}'} p(x)dx + \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}t_{N-1}'), \quad (27)$$

s tim da je veličina amplitudskog kvanta Δ_L u ovom slučaju jednaka:

$$\Delta_L = \frac{t_{N-1}' - t_{L-1}'}{N/L - 1}. \quad (28)$$

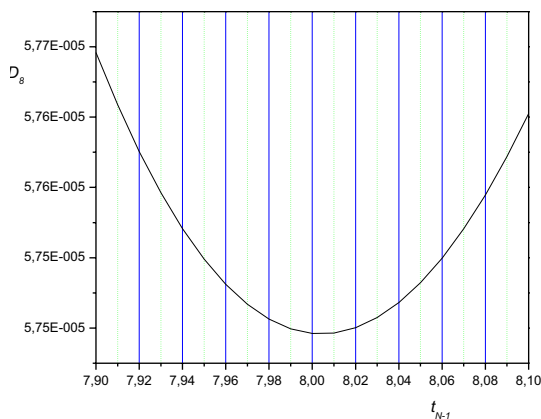
V. NUMERIČKI REZULTATI I DISKUSIJA

U Tabeli 1 dati su numerički rezultati za prethodna četiri metoda, za parametre $N = 128$ i $L = 16$. Na slikama 2 i 3 prikazano je numeričko određivanje t_{N-1}' za metode 3 i 4.

Vidimo da svaki metod predstavlja poboljšanje prethodnog. Metod 4 daje $SQNR$ 35.34 dB koji je vrlo blizak $SQNR$ za nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju.

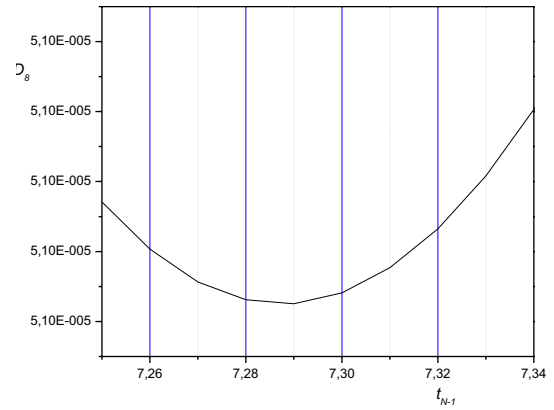
TABELA 1: NUMERIČKI REZULTATI

	t_{max}	t_{N-1}'	Δ_g	$SQNR$
I metod	∞	11.76	0.919	34.14
II metod	10.31	9.56	0.751	34.56
III metod	10.31	8.00	0.463	35.24
IV metod	10.31	7.29	0.427	35.34



Sl. 2. Numeričko određivanje granice granularnog regiona t_{N-1}'

Uvođenjem linearizacije i hijerarhijskog kodovanja proces kodovanja i dekodovanja postaje znatno jednostavniji i brži što govori o nesumljivom značaju linearizacije. Kako bi linearizovani model predstavljao dostojnu zamenu



Sl. 3. Numeričko određivanje granice granularnog regiona t_{N-1}'

izvornog nelinearnog modela, važan je pravilan izbor amplitudskog opsega kvantizera. U tom cilju potrebno je izvršiti optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije koju je veoma teško ostvariti analitički jer mnogi parametri kvantizera posredno zavise od veličine amplitudskog opsega kvantizera. Zbog toga smo se opredelili za numeričko određivanje amplitudskog opsega poštujući kriterijum minimuma distorzije.

LITERATURA

- [1] N. S. Jayant and P. Noll, "Digital Coding Of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video," New Jersey: Prentice Hall, 1984, 2nd ed., ch. 4, pp. 115-220.
- [2] Zoran Perić, Jelena Nikolić, "Linearizacija optimalne kompresorske funkcije", *Zbornik radova XVII telekomunikacionog foruma TELFOR 2009*, CD izdanje, str. 572-575, Beograd, 24-26. Novembar, 2009.
- [3] Zoran Perić, Jelena Nikolić, Zlatan Eskić, "Projektovanje linearizovanog hibridnog skalarnog kvantizera za Gausov izvor", *Zbornik radova INFOTEH JAHORINA 2009*, Vol. 8, Ref. B-I-10, str. 122-125, Jahorina, 18-20. Mart, 2009.
- [4] A. Gersho and R. M. Gray, "Vector Quantization and Signal Compression," Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1992, ch. 5, pp. 133-172.
- [5] Zoran Perić, Marko Petković, Milan Dinčić, "Simple Compression Algorithm for Memoryless Laplacian Source Based on the Optimal Companding Technique", *Informativa*, vol. 20, pp. 99-114, 2009.

ABSTRACT

In this paper linearization of the optimal compression function is done and hierarchical coding is applied, achieving a simple and fast process of encoding and decoding. Four methods for optimization of the last segment are proposed, which improves performances and obtained $SQNR$ (signal-to-quantization noise ratio) is close to that of the nonlinear optimal compression function.

IMPROVED LINEARIZATION OF THE OPTIMAL COMPRESSION FUNCTION WITH THE HIERARCHICAL CODING

Zoran H. Peric, Lazar Z. Velimirovic, Milan R. Dincic