

Analiza kvadratnog koaksijalnog voda sa anizotropnim dielektrikom metodom konačnih elemenata

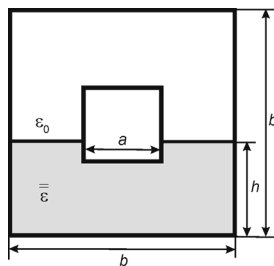
Žaklina J. Mančić¹, Vladimir V. Petrović², *Senior Member, IEEE*

Abstrakt — U radu je, primenom Galerkinove formulacije metode konačnih elemenata (FEM), uz upotrebu “slabih” funkcija bazisa trećeg reda, izvršen proračun efektivne relativne permitivnosti kvadratnog koaksijalnog voda sa anizotropnim i izotropnim dielektričnim slojem promenljive visine. Posebno je obrađen slučaj kada je vod do polovine ispunjen dielektrikom. Pokazano je da je u tom slučaju efektivna relativna permitivnost praktično jednaka vrednosti koju daje jedan jednostavan izrazu dat u radu.

Gljučne reči — Anizotropija, FEM, slaba formulacija, kvazistatička analiza, kvadratni koaksijalni vod.

I. UVOD

Kvadratnog poprečnog preseka sa anizotropnim dielektričnim slojem proizvoljne relativne visine h/b (sl. 1) primenjena je FEM metodologija [1],[2] detaljnije opisana u radovima [3]–[8]. Kako vodovi sa anizotropnim dielektrikom ne mogu da se analiziraju primenom metoda momenata [9], čak ni kada je dielektrik homogen i linearan, za takve probleme je FEM veoma pogodan izbor.



Sl. 1. Poprečni presek koaksijalnog kvadratnog voda delimično ispunjenog anizotropnim dielektrikom.

Posmatrajmo zatvoren dvodimenzionalni domen (sl. 2) ispunjen linearnim nehomogenim dielektrikom bez prisustva slobodnih naelektrisanja, pri čemu je raspodela elektrostatičkog potencijala, $V(x, y)$, nepoznata funkcija. Na jednom delu domena, ograničenom konturom C_1 ,

Ovaj rad je podržan od strane Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije (projekti TR-11033 i TR-11021).

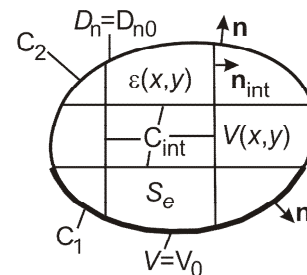
¹Elektronski Fakultet Niš, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija, (telefon: +381-18-529332; e-mail: zaklinamancic@elfak.ni.ac.rs).

²Elektrotehnički fakultet Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73, 11120 Beograd, Srbija +381-11-3218-329; e-mail: vp@etf.rs).

postoje granični uslovi prve vrste (poznat potencijal V), a na ostatku, ograničenom C_2 , postoje granični uslovi druge vrste (poznato $\partial V / \partial n$). Diferencijalna jednačina za $V(x, y)$ je

$$\operatorname{div}_S(\bar{\epsilon} \operatorname{grad}_S V) = 0, \quad (1)$$

gde je div_S površinska divergencija, grad_S je površinski gradijent, a $\bar{\epsilon}$ je tenzor permitivnosti, koji je u ovom slučaju 2×2 dijagonalni tenzor, $\bar{\epsilon} = \operatorname{diag}[\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}]$.



Sl. 2. Dvodimenzionalni zatvoren domen podeljen na elemente.

Posmatrani domen se deli na M pravougaonih poddomena, elemenata, a rešenje za $V(x, y)$ se dobija u obliku funkcije predstavljene u vidu linearne kombinacije funkcija bazisa sa nepoznatim koeficijentima, $V \approx f = \sum_{j=1}^N a_j f_j$. Svaka funkcija bazisa je različita od

nule na jednom elementu (funkcije “singleti”) ili na nekoliko susednih elemenata (funkcije “dubleti” i “kvadrupleti” [4],[5]). Prema Galerkinovoj proceduri [1],[2] dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina sa nepoznatim koeficijentima,

$$[K_{ij}][a_j] = [G_i], \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$K_{ij} = \int_S (\operatorname{grad} f_i) (\bar{\epsilon} \operatorname{grad} f_j) dS, \quad G_i = \int_{C_2} f_i D_{n0} dl, \quad (3)$$

gde je D_{n0} poznata normalna komponenta vektora \mathbf{D} na konturi C_2 , i i j su globalni redni brojevi funkcija

bazisa, a S je unija površi svih elemenata, $S = \bigcup_{e=1}^M S^e$.

Sistem jednačina (2) se rešava na standardni način i dobija približno rešenje f .

II. SLABE FEM FUNKCIJE BAZISA

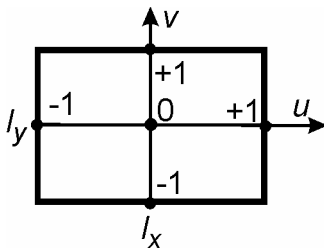
FEM pristup primenjen u ovom radu zasnovan je na hijerarhijskim i tzv. "slabim" funkcijama bazisa koje su dobijene kao sve moguće kombinacije 1D slabih funkcija bazisa [3]:

$$f_j(u, v) = f_{k,l}(u, v) = f_k(u) f_l(v), \quad (4)$$

gde su jednodimenzionalne funkcije bazisa date izrazom:

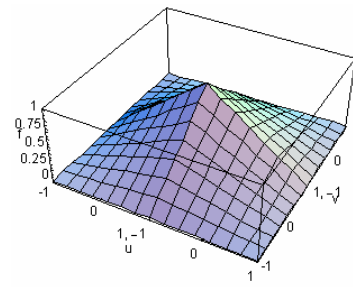
$$f_k(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-u)(1+u)^{k-1}, & k = 1, \dots, n \\ \frac{1}{2}(1+u), & k = n+1, \end{cases} \quad (5)$$

u i v su normalizovane koordinate elementa (sl. 3), a n predstavlja red aproksimacije u x i y pravcu (n_x i n_y). Neke od ovih funkcija bazisa su grafički predstavljene na sl. 4.

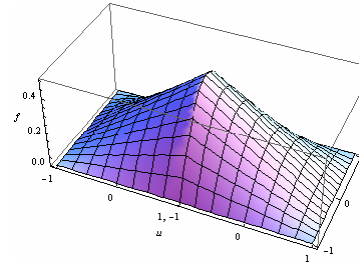


Sl. 3. Koordinatni sistem pravougaonog konačnog elementa.

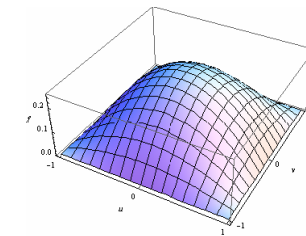
Ovakav FEM postupak se razlikuje od klasičnog FEM postupka sa čvrno zasnovanim interpolacionim funkcijama bazisa nižeg reda. Kod primenjenog postupka kontinuitet funkcije (C^0 kontinuitet za elektrostatički potencijal $V(x, y)$) je obezbeđen pomoću kvadrupleta – specijalnih funkcija bazisa različitih od nule na četiri susedna elementa, i dubleta – specijalnih funkcija bazisa različitih od nule na dva susedna elementa mreže. Kvadrupleti (sl. 4a) su linearne funkcije obe koordinate i obezbeđuju kontinuitet u čvorovima elemenata pa se mogu smatrati čvrno zasnovanim. Oni imaju vrednost nula na spoljašnjim ivicama grupe od četiri elementa a na unutrašnjim čvorovima vrednost različitu od nule. Dubleti (sl. 4b) su linearne funkcije duž jedne koordinate a kvadratne funkcije duž druge koordinate, čime je obezbeđen kontinuitet duž zajedničke stranice. Sve ostale funkcije bazisa se definišu samo na po jednom elementu i one su hijerarhijske. To su singleti (sl. 4c) i jednake su nuli na svim ivicama elementa. One su proizvoljnog (višeg) reda i obezbeđuju poboljšanje tačnosti rešenja unutar elemenata. Minimalni red aproksimacije za slabu formulaciju je $n_{x,\min} = n_{y,\min} = 1$, kada su sve funkcije bazisa ili kvadrupleti ili njihovi ostaci uz granicu oblasti. Aproksimacija trećeg ili višeg reda se sastoji od kvadrupleta, dubleta i singleta. Ove hijerarhijske funkcije bazisa višeg reda su mnogo jednostavnije od klasičnih interpolacionih nehijerarhijskih funkcija bazisa koje su u vidu Lagranževih interpolacionih polinoma u dodatnim, unutrašnjim, čvorovima elementa.



(a)



(b)



(c)

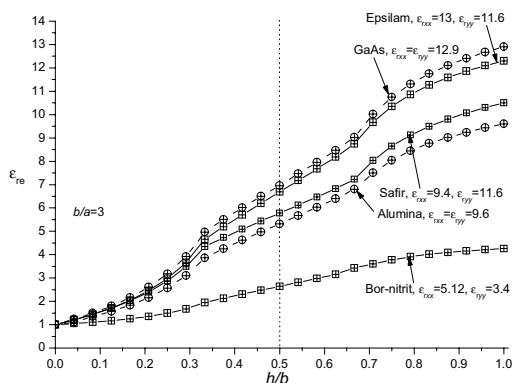
Sl. 4. Neke tipične funkcije bazisa: (a) kvadrupleti, (b) dubleti i (c) singleti.

FEM proračun u ovom radu izvršen je uz upotrebu slabih funkcija bazisa trećeg reda, $n_x = n_y = 3$, jer se pokazalo [4]–[8] da su one za 2D probleme optimalne u pogledu tačnosti i broja elemenata mreže. U konkretnom proračunu broj elemenata mreže je 512, što daje 4416 nepoznatih bez uzimanja u obzir simetrije.

III. NUMERIČKI REZULTATI

Analizirana je struktura sa sl. 1, za $b = 3a$, kod koje je visina dielektrika promenljiva, za nekoliko često korišćenih anizotropnih i izotropnih materijala. Rezultati su prikazani grafički na sl. 5.

Relativnu visinu dielektričnog sloja, iznad koga je vazduh, menjali smo od nule, kada je vod potpuno ispunjen vazduhom, do jedan, kada je vod potpuno ispunjen dielektrikom. U drugom slučaju je za izotropne materijale (u radu su od izotropnih materijala posmatrani GaAs i alumina) relativna efektivna permitivnost jednaka relativnoj permitivnosti dielektrika, dok za anizotropne materijale ima sledeće vrednosti: za epsilam $\epsilon_{re} = 12.305$, za bor-nitrit $\epsilon_{re} = 4.261$ i za safir $\epsilon_{re} = 10.504$. Ove vrednosti su praktično jednake aritmetičkoj sredini $(\epsilon_{rx} + \epsilon_{ry})/2$, koja za epsilam iznosi $\bar{\epsilon}_{re} = 12.3$, za bor-nitrit $\bar{\epsilon}_{re} = 4.26$ i za safir $\bar{\epsilon}_{re} = 10.5$.



Sl. 5. Relativna efektivna permitivnost, ϵ_{re} , u funkciji relativne visine dielektrika, h/b , za tri anizotropna i dva izotropna dielektrika.

Slaganje dve grupe rezultata je na 3 značajne dekadne cifre, tj. sa tačnošću boljom od 0.5%.

Ako je vod do polovine ispunjen izotropnim dielektrikom iznad koga je vazduh, relativna efektivna permitivnost je $\bar{\epsilon}_{re} = (1 + \epsilon_r) / 2$. Vrednosti ϵ_{re} proračunate za izotropne materijale i vrednosti dobijene formulom predstavljene su u Tabeli I i pokazuju odlično slaganje. Za anizotropne materijale je takođe tabelarno prikazano ϵ_{re} . Ove vrednosti su brojno veoma bliske vrednostima koje se dobijaju iz izraza $\bar{\epsilon}_{re} = (1 + (\epsilon_{rxx} + \epsilon_{ryy}) / 2) / 2$. Odstupanja, takođe prikazana u Tabeli I, su oko 0.5%.

IV. ZAKLJUČAK

Prikazani rezultati proračuna efektivne permitivnosti za koaksijalni vod kvadratnog poprečnog preseka, koji je delimično ili potpuno ispunjen anizotropnim dielektrikom, pokazale su da je metoda konačnih elementa trećeg reda izuzetno tačna za proračun ovakvih problema. Za anizotropne dielektrike metoda momenata ne može da se primeni, pa je u ovom slučaju FEM odličan izbor. Proračunate vrednosti relativne efektivne permitivnosti za vod do pola ispunjen dielektrikom se odlično slažu sa rezultatima koje daje jedan jednostavan analitički izraz dat u radu.

TABELA 1: RELATIVNE PERMITIVNOSTI KVADRATNOG KOAKSIJALNOG VODA ISPUNJENOG DO POLOVINE ANIZOTROPNIM I IZOTROPNIM DIELEKTRICIMA.

dielektrik	Safir	Bor-nitrit	Epsilam	Alumina	Galijum-arsenid
ϵ_{rxx}	9.4	5.12	13	9.6	12.9
ϵ_{ryy}	11.6	3.4	11.6	9.6	12.9
$\epsilon_{re}^{FEM} (h/b = 0.5)$	5.78	2.64	6.68	5.33	6.99
$\bar{\epsilon}_{re}$	5.75	2.63	6.65	5.30	6.95
$\delta_{\epsilon_{re}} (\%)$	0.52	0.38	0.45	0.57	0.58

REFERENCE

- [1] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley: NewYork, 1993.
- [2] P. P. Silvester, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 3rd Ed., University Press: Cambridge, 1996.
- [3] V. V. Petrovic and B. D. Popovic, "Optimal FEM solutions of one-dimensional EM problems", *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Field*, vol. 14, no. 1, pp. 49–68, Jan.-Feb. 2001.
- [4] Z. J. Mancic and V. V. Petrovic, "Strong FEM Solution for the Square Coaxial Line", *Zbornik radova TELSIS 2009*, Niš, oktobar 2009, pp. 343–346.
- [5] Ž. J. Mančić and V. V. Petrovic, "Strong and Weak FEM Formulations of Higher Order for Quasi-Static Analysis of Shielded Planar Transmission Lines", *Microwave and Optical Technology Letters*, submitted for publication.
- [6] Ž. J. Mančić, S. R. Aleksić, V. V. Petrović, "Comparison of FEM, MoM and EEM in Solving a Benchmark 2D Electrostatic Problem", Konferencija PES, Niš, 2007.
- [7] Ž. J. Mančić i V. V. Petrović, "Analiza konvergencije i tačnosti metoda konačnih elemenata za proračun vodova sa TEM talasom", Konferencija YUINFO, Kopaonik, 2009.
- [8] V. V. Petrovic and Z. J. Mancic, "Strong FEM Formulation for Quasi-Static Analysis of Shielded Planar Transmission Lines in Anisotropic Media" rad prihvaćen za konferenciju ECCSC2010, Beograd, 2010.
- [9] A. R. Djordjević, M. B. Badzar, T. K. Sarkar, R. F. Harrington, *Linpar for Windows, Matrix Parameters for Multiconductor Transmission Lines*, Software and User's Manual, Artech House, 1996.

ABSTRACT

In the paper, effective relative permittivity of the square coaxial line with anisotropic and isotropic dielectric layer of different height is calculated by the use of Galerkin formulation of the Finite Element Method (FEM). Special attention is devoted to the case when the line is half filled with dielectric. It was shown that, in this case, effective relative permittivity is practically equal to the value given by a simple formula given in the paper.

ANALYSIS OF THE SQUARE COAXIAL LINE WITH ANISOTROPIC DIELECTRIC BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Zaklina J. Mancic, Vladimir V. Petrovic